GEOMETRIE DANS LA TRADITION ARABE (SUITE)

Hélène Bellosta

4. LA GEOMETRIE SPHERIQUE ET LA NAISSANCE DE LA TRIGONOMETRIE

Les recherches en géométrie sphérique et en trigonométrie sont initialement provoquées par les besoins de l'astronomie mathématique qui connaît à partir du IX^e siècle dans le monde arabe un développement sans précédent. Ces recherches bénéficient au départ des apports grec et indien. Les premiers textes d'astronomie scientifique traduits en arabe au VIII^e siècle sont en effet d'origine persane et, *via* l'Iran, indienne. Ces premiers traités d'astronomie (désignés par le terme *zîj*) comportent des tables de sinus et de sinus verse qui sont les deux apports fondamentaux de l'astronomie indienne. À partir du IX^e siècle les sources grecques vont prendre le pas sur celles-ci.

Les bases théoriques des calculs astronomiques dans les mathématiques grecques se trouvent essentiellement chez Théodose (I^e siècle AD), Ménélaüs (vers 100 AD), et Ptolémée (II^e siècle AD). Ces calculs ne font intervenir ni sinus, ni flèche, et se font à l'aide de la corde de l'arc double. *Les Sphériques* de Théodose ainsi que l'*Almageste* de Ptolémée sont traduits à plusieurs reprises dès le IX^e siècle. Le texte grec des *Sphériques* de Ménélaüs, plus grand point de développement de la géométrie sphérique grecque, est perdu, seules diverses versions arabes faites au IX^e siècle nous en ont été conservées (rédactions d'Ahmad Ibn Abi Sa'd al-Harawî et d'Abū Naṣr Manṣūr b. 'Alî b. 'Iræq[1] en particulier). Dans le livre I figure la première définition d'un triangle sphérique (portion de la surface de la sphère délimitée par des arcs de grands cercles inférieurs à un demi-cercle) ainsi que diverses propositions concernant ce triangle sphérique, analogues à celles que l'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide concernant le triangle plan (en particulier le fait que la somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à deux droits). Dans le livre III se trouve le théorème le plus célèbre de l'ouvrage, le théorème dit « de Ménélaüs » sur la sphère ou « figure secteur » (sous les deux formes de la diérèse et de la synthèse, voir *infra*) dont la figure de base est le quadrilatère complet. Cette proposition constitue le seul instrument spécifique de l'astronomie sphérique, c'est l'unique moyen d'établir à la surface de la sphère des relations entre arcs de grands cercles. La démonstration de ce théorème est reprise par Ptolémée ; c'est avec la formulation de Ptolémée que cette proposition est connue et utilisée par tous les astronomes[2].

L'*Almageste* de Ptolémée est le point culminant de l'astronomie grecque. Ptolémée y énonce les propositions minimales de géométrie plane sur lesquelles est basé le calcul des cordes, parmi lesquelles le théorème dit « de Ptolémée » : $ABCD$ étant un quadrilatère plan inscrit dans un cercle, de diagonales AC et BD, alors $AC.BD = AB.DC + AD.BC$. On doit également à Ptolémée une formule d'interpolation basée sur le fait que si $\widehat{a} < \widehat{b} < \pi R$, alors $\dfrac{\mathrm{Crd}\,\widehat{b}}{\mathrm{Crd}\,\widehat{a}} < \dfrac{\widehat{b}}{\widehat{a}}$, ainsi que l'approximation de crd $2\widehat{a}$ par $2\widehat{a}$ pour des valeurs "petites" de $\widehat{a}$ et des tables de cordes.

---

1 *Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr b. 'Alî b. 'Iræq, mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematikern*, Abhandlungen des Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, phil.-hist. Klasse, 3, 17 [1936]).

2 *Composition Mathématique de Claude Ptolémée*, trad. M. Halma (Paris 1813, fac-simile 1988), Livre I, chap. XI, *Préliminaires pour les démonstrations sphériques*, p. 50-55.

4.1 *Sinus, sinus verse et tangente*

Sinus et sinus verse sont, on l'a dit, les deux apports fondamentaux de l'astronomie indienne ; ces nouvelles fonctions qui simplifient leurs calculs vont rapidement s'imposer aux astronomes.

Le sinus (noté Sin) est défini comme une grandeur (longueur) et non comme un rapport : c'est la demi-corde de l'arc double dans un cercle de référence dont le rayon *R* est généralement fixé à 60 ; le sinus verse ($\mathrm{Ver}\,\bar{a} = R - \mathrm{Cos}\,\bar{a}$), ou flèche de l'arc double, qui va plus tard tomber en désuétude, remplacé par le cosinus (ou sinus du complémentaire), présente sur celui-ci l'avantage, en l'absence de toute notion d'orientation et de signe, de prendre des valeurs distinctes positives pour des angles supplémentaires. Al-Bîrūnî (973-mort après 1050), dans le *Qænūn al-Mas'ūdî*, précédé par Abū al-Wafæ' al-Buzfiænî (Bagdad, 940-997/8) dans son *Almageste*[3], définira le sinus en posant $R = 1$, mais ceci ne deviendra la norme qu'au XIX[e] siècle, après Gauss. Le fait de poser $R = 60$ facilite d'ailleurs les calculs nécessaires à l'établissement de tables, lesquels sont le plus souvent effectués en fractions sexagésimales.

Introduite par l'astronome Îaba‡ al-Îæsib al-Marwazî dès le IX[e] siècle dans son *Zîj al-mumtaḥan* (composé après 869), la tangente en revanche ne s'impose que lentement dans les tables et les calculs des astronomes. Il faut attendre l'*Almageste* d'Abū al-Wafæ' al-Buzfiænî (Bagdad, 940-997/8) pour que son rôle dans l'astronomie sphérique soit reconnu : dans le chapitre 6 du livre I, Abū al-Wafæ', après avoir rappelé les définitions du sinus et du sinus verse, définit la tangente et la cotangente et en donne des tables. Il établit également dans ce chapitre les relations élémentaires entre tangente, cotangente, sinus et cosinus et note que si le cercle de référence a pour rayon 1, la tangente est égale au rapport du sinus au cosinus et la cotangente au rapport du cosinus au sinus[4].

4.2 *Le traité de Thæbit ibn Qurra sur* **La figure secteur**

Un certain nombre de traités mathématiques vont être, dans le monde arabe, consacrés au théorème de Ménélaüs sur la sphère ou « figure secteur » (*al-‡akl al-qa††æ'*). Le traité de Thæbit Ibn Qurra (mort en 901) sur *La figure secteur*[5] est le premier de ces traités à nous être parvenu ; point de départ de toute un courant, il influencera profondément le développement ultérieur de la géométrie sphérique.

Dans ce traité, Thæbit complète, dans un premier temps la démonstration que Ptolémée donne du théorème de Ménélaüs ; Ptolémée n'en démontre en effet qu'une forme (la diérèse, voir *infra*) et seulement dans un cas de figure ; sa démonstration revient à se ramener, dans un plan passant par trois sommets d'un quadrilatère complet sur la sphère, au cas correspondant du théorème de Ménélaüs dans ce plan. Thæbit rappelle la démonstration de Ptolémée, puis montre que, par des permutations de points et des manipulations de rapports, les autres cas de figure se

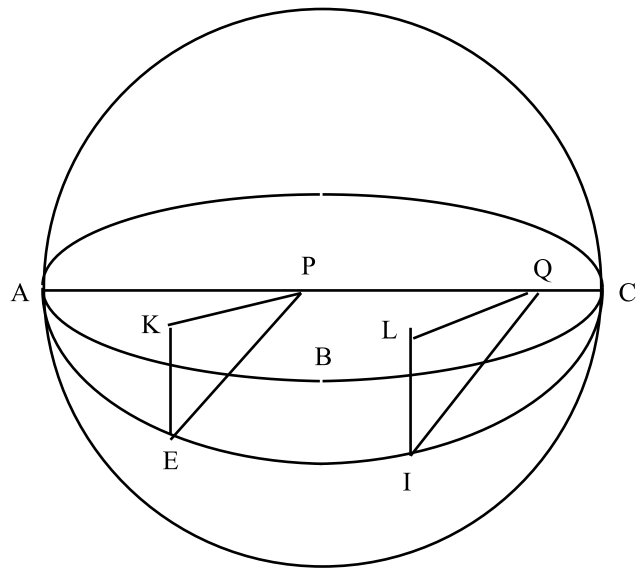
---

3 *Almageste* d'Abū Wafæ' al-Buzjænî, Ms. B. N. 2494. Cf. Ali Moussa, *L'Almageste d'Abū Wafæ' al-Buzjænî*, à paraître.

4 M. T. Debarnot, « Trigonométrie » *Histoire des sciences arabes*, dir. R. Rashed, 3 vol. Seuil, Paris, 1997, vol. II, p. 163-198.

5 H. Bellosta, « Le traité de Thæbit ibn Qurra sur *La figure-secteur* », *Arabic Sciences and Philosophy*, Cambridge University Press, 2004, vol. 14, n° 1, p. 145-168. A. Björnbo, *Thabits Werk über den Transversalensatz* (Erlangen, 1924). R. Lorch, *Thæbit ibn Qurra, On the sector-figure and related texts*, Institute for the history of Arabic-islamic science (Franckfurt am am Main, 2001).

ramènent au cas unique traité par Ptolémée. Il propose ensuite de ce théorème une démonstration alternative, plus simple et plus élégante. Celle-ci repose sur un lemme qui jouera un rôle fondamental dans les démonstrations de ses successeurs.



Lemme : soient $AEIC$ et ABC deux grands cercles de la sphère, K et L les projetés respectifs de E et I sur le plan ABC, P et Q leurs projetés orthogonaux sur la droite AC, alors $\frac{EK}{IL}=\frac{EP}{IQ}=\frac{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{AE}}{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{AI}}=\frac{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{CE}}{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{CI}}$ (quel que soit le cas de figure, EKP et ILQ étant des triangles semblables).

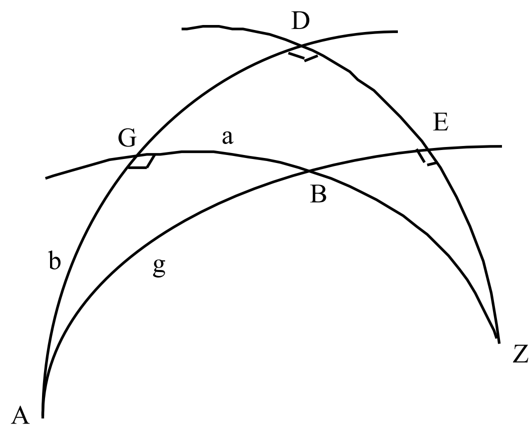
Thæbit en déduit alors, en projetant orthogonalement sur le plan de l'un des arcs de grands cercles les points du quadrilatère complet, la démonstration du théorème de Ménélaüs sous ses deux formes : $\frac{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{BA}}{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{BE}}=\frac{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{DA}}{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{DF}}.\frac{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{CF}}{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{CE}}$ (synthèse), et $\frac{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{EA}}{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{EB}}=\frac{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{FA}}{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{FD}}.\frac{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{CD}}{\mathrm{Crd}\,2\overset{\frown}{CB}}$ (diérèse), AEB, AFD, CFE, CDB étant des arcs de grands cercles de la sphère.

Dans la troisième partie de son traité, dans le but de rechercher de façon exhaustive toutes les formes alternatives que peut prendre le théorème de Ménélaüs, tant dans le plan que sur la sphère, Thæbit s'intéresse à l'aspect combinatoire de la composition des rapports. A la suite de Thæbit un certain nombre de mathématiciens (al-Nayrizî, fin IX^e^ début X^e^, al-Khæzîn, première moitié du X^e^, Ibn 'Iræq, X^e^ siècle, Naṣîr al-Dîn al-Ṭūsî, XIII^e^ siècle ; etc.) s'attachent à explorer systématiquement tous les cas de figure et toutes les permutations possibles des rapports pour le théorème de Ménélaüs, tant dans le plan que sur la sphère. C'est le cas en particulier d'al-Sifizî (seconde moitié du X^e^ siècle) qui ramène, par une méthode uniforme, chaque cas au cas correspondant dans le plan, dans la tradition de Ptolémée.

4.3 *Le théorème des sinus sur la sphère et les diverses formules équivalentes*

Les recherches des astronomes de la fin du X^e^ siècle s'orientent vers la substitution au théorème de Ménélaüs de relations dans le triangle rectangle sphérique évitant le recours au rapport composé, parmi lesquelles le théorème des sinus sur la sphère. Présentées dans le cadre de traités d'astronomie, ces formules, plus simples d'usage que le théorème de Ménélaüs, apparaissent dès le début du Xᵉ siècle. L'historique de la découverte de ces formules et les querelles de priorité entre leurs divers auteurs sont rapportées par al-Bîrūnî (973-1048), en préambule à son traité de géométrie sphérique *Les Clefs de l'astronomie* (texte écrit entre 994 et 1004)[6].

Al-Nayrizî (fin IXᵉ -début Xᵉ) établit dans son commentaire de l'*Almageste*, une formule qui n'est en fait qu'un cas particulier, dans le cas d'un triangle rectangle, du théorème général des sinus sur la sphère ; cette formule sera reprise par al-Khæzin et Abū Naṣr Ibn 'Iraq qui en donneront des démonstrations différentes :



<u>Proposition 1</u> : *ABE*, *AGD*, *ZBG*, *ZED* étant des arcs de grands cercles inférieurs à un demi-cercle, tels que *ZED* soit orthogonal à *AGD* et *ABE*, et *ZBG* orthogonal à *AGD*, alors : $\dfrac{\text{Sin}\,\overparen{BG}}{\text{Sin}\,\overparen{ED}} = \dfrac{\text{Sin}\,\overparen{AB}}{\text{Sin}\,\overparen{AE}}$ (corollaire $\dfrac{\text{Sin}\,\overparen{BG}}{\text{Sin}\,\hat{A}} = \dfrac{\text{Sin}\,\overparen{AB}}{R} = \dfrac{\text{Sin}\,\overparen{AB}}{\text{Sin}\,\hat{G}}$).

Abū Naṣr Ibn 'Iraq, dans son traité *Les Azimuts*, établit une autre formule qui lui sert à calculer l'ascension droite et oblique du soleil.

<u>Proposition 2</u> (avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations que dans la proposition 1) : $\dfrac{\text{Sin}\,\overparen{BZ}}{\text{Sin}\,\overparen{EZ}} = \dfrac{\text{Sin}\,\overparen{BA}}{\text{Sin}\,\overparen{AG}}$ (corollaire $\dfrac{\text{Cos}\,\overparen{a}}{\text{Cos}\,\hat{A}} = \dfrac{\text{Sin}\,\overparen{g}}{\text{Sin}\,\overparen{b}}$).

Dans son *Épître sur les arcs sphériques* composée à la suite de ce traité, Ibn 'Iraq énonce et démontre le théorème général des sinus sur la sphère.

<u>Proposition 3</u> (*théorème des sinus*) : dans tout triangle sphérique formé d'arcs de grands cercles, les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des arcs mesurant les angles qui leur sont opposés (*ABC* étant un triangle sphérique $\dfrac{\text{Sin}\,\overparen{BC}}{\text{Sin}\,\hat{A}} = \dfrac{\text{Sin}\,\overparen{CA}}{\text{Sin}\,\hat{B}} = \dfrac{\text{Sin}\,\overparen{AB}}{\text{Sin}\,\hat{C}}$).

[6] M. T. Debarnot, *Al-Bîrūnî, Kitæb maqælîd 'ilm al-hay'a, La trigonométrie sphérique chez les arabes de l'est à la fin du dixième siècle*, Institut Français de Damas, Damas 1985.

Ibn ‘Iraq fait suivre ce théorème des corollaires des propositions 1 et 2, et démontre que tous les problèmes de l'*Almageste* peuvent être résolus grâce à ces nouvelles formules.

Abū al-Wafæ' al -Buzfiænî démontre également dans son *Almageste* quelques propositions :

> Proposition 4 (ou *règle des quatre quantités*) : le rapport des sinus des arcs est égal au rapport des sinus de leurs inclinaisons premières.

Cette règle n'est autre qu'une formulation différente du lemme de Thæbit, ne faisant plus intervenir que des arcs de grands cercles de la sphère et leurs sinus, plus conforme à la terminologie des astronomes et mieux adaptée sans doute aux calculs astronomiques.

> Proposition 5 (ou *règle des tangentes*) : soient *ABDC* et *AGEC* deux grands cercles de la sphère, tels que *ZBG* et *ZDE* soient deux arcs de grands cercles orthogonaux à *AGEC*, alors $\frac{\mathrm{Sin}\,\overset{\frown}{AG}}{\mathrm{Sin}\,\overset{\frown}{AE}} = \frac{\mathrm{Tan}\,\overset{\frown}{BG}}{\mathrm{Tan}\,\overset{\frown}{DE}}$.

Cette règle, qui consacre l'entrée définitive de la tangente dans les calculs astronomiques, est critiquée par ses contemporains, al-Khujandî et Kūshyær, astronomes de Rayy, qui objectent que l'emploi de la tangente est incorrect au voisinage de l'angle droit en raison de l'accroissement trop rapide dans ce cas des différences tabulaires[7].

Abū al-Wafæ' démontre ensuite *le théorème des sinus sur la sphère*, d'abord pour un triangle rectangle (à l'aide de la proposition 4), puis pour un triangle quelconque.

Abū Maḥmūd al-Khujandî enfin, utilisant la proposition d'al-Nayrîzî, donne de la règle des quatre quantités une démonstration plus longue.

Dans le livre V de son *Traité du quadrilatère*, vaste synthèse des traités précédents, Naṣîr al-Dîn al-Ṭūsî (1201-1274), reprend, avec leurs démonstrations, ces diverses formules (*règle des tangentes*, *règle des quatre quantités*, *théorème des sinus* et ses corollaires) et souligne l'importance du lemme de Thæbit Ibn Qurra[8].

La diversité des formules substituées au théorème de Ménélaüs et de leurs démonstrations montre que ces mathématiciens sont manifestement arrivés à leurs résultats indépendamment les uns des autres. Toutes ces formules, plus ou moins équivalentes, ont cependant en commun le fait d'éviter dans leurs formulations le recours au rapport composé, même si celui-ci intervient dans leurs démonstrations ; en outre la configuration de base n'y est plus le quadrilatère complet mais le triangle sphérique (et en particulier le triangle rectangle sphérique), figure d'un usage beaucoup plus simple.

Naṣir al-Din al-Ṭūsi et le triangle polaire

[7] M. T. Debarnot, « Trigonométrie » *Histoire des sciences arabes*, vol. II, p. 163-198.

[8] A. Caratheodory, *Le traité du quadrilatère attribué à Nassiruddin-el-Toussy*, Constantinople, 1891, rééd. Sezgin, 1998, p. 70.

À la suite de ces travaux, les calculs de détermination de triangles sphériques remplacent progressivement, à partir de la fin du X^{e} siècle les développements sur le théorème de Ménélaüs. Al-Tūṣi, dans le livre V de son *Traité du quadrilatère*, complète le travail d'al-Bîrūnî qui, dans ses *Clefs de l'astronomie*, outre le cas des triangles rectangles, ne résolvait que les deux cas où, soit deux angles et un côté, soit deux côtés et un angle du triangle sont connus. Al-Tūṣi résout chacun de ces deux premiers cas par deux méthodes : soit, comme al-Bîrūnî, en se ramenant à la détermination d'un triangle rectangle en menant la hauteur issue d'un sommet, soit en faisant intervenir la polaire d'un sommet et en complétant le quadrilatère. Le troisième cas (les trois côtés sont connus) est résolu seulement par la seconde méthode (polaire de l'un des sommets). Le dernier cas (les trois angles sont connus) est le plus intéressant : al-Ṭūsî, comme avant lui Abū Naṣr Ibn 'Iræq[9] définit le triangle polaire *LMN* du triangle *ABC* (les côtés du triangle *LMN* étant les polaires des sommets *A*, *B* et *C*) et montre que si les angles de l'un sont connus, les côtés de l'autre le sont, ramenant ainsi la détermination des côtés du triangles *ABC* dont les angles sont connus à celle des angles du triangle *LMN* dont les côtés sont connus ; c'est le seul usage connu du triangle polaire dans le monde arabe.

4.4 *Le théorème des sinus dans le plan*

Alors que l'historique de la découverte du théorème des sinus sur la sphère est bien connu, il est difficile de retracer l'apparition du théorème des sinus dans le plan. Tout se passe en fait comme si c'était la découverte du théorème des sinus sur la sphère qui avait suggéré l'énoncé de sa version plane sous la forme trigonométrique que nous connaissons. Abū Naṣr Ibn 'Iraq le premier, en réponse à une question posée par al-Bîrūnî, donne, sous sa forme trigonométrique, l'énoncé et la démonstration de ce théorème : *ABC* étant un triangle plan, alors $\frac{AC}{AB} = \frac{\mathrm{Sin}\,\hat{B}}{\mathrm{Sin}\,\hat{C}}$ [10].

On rencontre cependant dans une œuvre du géomètre de la première moitié du X^{e} siècle, Ibræhîm Ibn Sinæn, son *Anthologie de problèmes*[11], la proposition suivante, énoncée et démontrée géométriquement : $AB.AC = AH.d$, *AH* étant la hauteur issue de *A* du triangle *ABC* et *d* le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle (relation qui équivaut à $\frac{AB}{\sin\hat{C}} = d$, forme générale du théorème des sinus dans le plan). Le fait que ce théorème soit également utilisé, sous cette même forme géométrique, dans deux démonstrations, que nous rapporte Ibn Sinæn dans son *Anthologie de problèmes* et qu'il attribue à ses contemporains Abū al-'Alæ' Ibn Karnib et Abū Yaḥyæ al-Mæwardî, tendrait à prouver que ce théorème était, sous cette forme, dans la première moitié du X^{e} siècle, et dans le milieu des géomètres de Bagdad, d'un usage assez courant, quoique récent. Ibn Sinæn démontre ce théorème en utilisant la similitude directe de centre *A* qui transforme *H* en *B*, cette similitude transforme le triangle *AHC* en un triangle *ABA*'dont les sommets sont sur le cercle circonscrit au triangle *ABC*. Ibn Sinæn résout en outre, dans cette *Anthologie*, un certain nombre de problèmes de détermination de triangles plans, ou de relations

9 M. T. Debarnot, *Al-Bîrūnî, Kitæb maqælîd 'ilm al-hay'a*, p. 192, note 1.

10 « Lorsque tu as su que, dans les triangles formés d'arcs de grands cercles d'une sphère, le rapport du sinus d'un côté au sinus d'un autre côté était égal au rapport du sinus de l'angle opposé au premier côté au sinus de l'angle opposé au second, tu as demandé si la loi était générale pour tous les triangles, je veux dire qu'ils soient formés d'arc ou de lignes droites. Notre réponse est oui… » (M. T. Debarnot, *Al-Bîrūnî, Kitæb maqælîd 'ilm al-hay'a*, p. 144).

11 R. Rashed et H. Bellosta, *Ibræhîm ibn Sinæn : logique et géométrie au X^{e} siècle*, Brill, Leyde 2000, p. 439-440, 451-542.

métriques dans le triangle ou dans le cercle, qui sont bien à la lettre des problèmes de trigonométrie, mais sans utiliser explicitement, dans la résolution des ces problèmes, de fonctions trigonométriques.

On trouve en tout état de cause au XIII^{e} siècle, dans le *Traité du quadrilatère complet* de Nasîr al-Dîn al-Tūsî[12], le théorème des sinus dans le plan présenté comme le théorème fondamental qui permet le calcul des angles et des côtés d'un triangle plan quelconque dont on connaît respectivement deux côtés et un angle, deux angles et un côté, trois côtés : pour chacun de ces cas, al-Ṭūsî expose deux méthodes, une dite « par les arcs et les cordes » (nécessitant l'usage d'une table de cordes) l'autre dite « par les arcs et les sinus » (nécessitant l'usage d'une table de sinus).

4.5 *La trigonométrie plane*

Les formules de trigonométrie telles que nous les entendons aujourd'hui ne semblent pas avoir éveillé en elles-mêmes d'intérêt ; il n'y a pas à proprement parler de traité qui leur soit consacré ; ces formules se trouvent le plus souvent éparses dans les textes astronomiques où elles sont appliquées à la construction de tables. On trouve par exemple dans le le *Zîj* de Îaba‡ (voir *supra*) une formule qui équivaut à : $\sin^2 a = \frac{1}{2}.(1 - \cos 2a)$ d'où il déduit un procédé d'extraction des racines à l'aide de la table des sinus.

Le chapitre I, 5 de l'*Almageste* d'Abū al-Wafæ' al-Buzfiænî fournit un certain nombre de formules trigonométriques[13]. Abū al-Wafæ' y rappelle d'abord les définitions classiques du diamètre, de la corde, du sinus, du sinus verse, du cosinus (la tangente est définie dans le chapitre suivant), il y étudie ensuite la détermination des sinus et des cordes des complémentaires, le calcul réciproque du sinus et de la corde, la détermination des sinus et des cordes des moitiés et des doubles, puis des sommes et des différences. Ces formules, toutes établies géométriquement, correspondent pour certaines aux formules suivantes :

$\mathrm{Cos}\,\widehat{a} = \sqrt{R^2 - \mathrm{Sin}^2\,\widehat{a}}$, $\mathrm{Ver}\,\widehat{a} = R \pm \mathrm{Cos}\,\widehat{a}$, $\mathrm{Sin}\,\widehat{a} = \sqrt{\mathrm{Ver}\,\widehat{a}(2R - \mathrm{Ver}\,\widehat{a})}$, $\frac{\mathrm{Ver}\,\widehat{a}}{\mathrm{Crd}\,\widehat{a}} = \frac{\mathrm{Crd}\,\widehat{a}}{2R}$,

$\frac{1}{2}\mathrm{Sin}2\widehat{a} = \frac{\mathrm{Sin}\,\widehat{a}\,\mathrm{Cos}\,\widehat{a}}{R}$, $\mathrm{Sin}(\widehat{a} \pm \widehat{b}) = \frac{\mathrm{Sin}\,\widehat{a}\,\mathrm{Cos}\,\widehat{b}}{R} \pm \frac{\mathrm{Sin}\,\widehat{b}\,\mathrm{Cos}\,\widehat{a}}{R}$.

Le traité d'al-Bîrūnî sur *La détermination des cordes* fournit quelques autres formules[14]. Partant d'une proposition géométrique qui est la suivante :

soit ABC une ligne brisée dans un cercle, D le milieu de l'arc ABC, E le projeté orthogonal de D sur (AB), alors $AE = EB + BC = \frac{AB + BC}{2}$, al-Bîrūnî en déduit : $AB.BC + DB^2 = AD^2$, c'est-à-dire $\mathrm{Sin}\,\widehat{a}.\mathrm{Sin}\,\widehat{b} + \mathrm{Sin}^2\frac{\widehat{a} - \widehat{b}}{2} = \mathrm{Sin}^2\frac{\widehat{a} + \widehat{b}}{2}$.

---

12 A. Caratheodory, *Le traité du quadrilatère*, p. 70.

13 M. T. Debarnot, « Trigonométrie » *Histoire des sciences arabes*, dir. R. Rashed, 3 vol. Seuil, Paris, 1997, vol. II, p. 188.

14 Al-Bîrūnî, *Istikhræfi al-awtær fil dæ'ira*, éd. A. S. El-Demerdash, Le Caire 1965.

Il démontre également la proposition suivante : *ADCB* étant rangés dans cet ordre sur un cercle et tels que arcAD = arcDC, alors $AB.BC + DC^2 = DB^2$, formule qui équivaudrait à $\mathrm{Sin}\,\widehat{a}.\mathrm{Sin}\,\widehat{b} + \mathrm{Cos}^2\dfrac{\widehat{a}+\widehat{b}}{2} = \mathrm{Cos}^2\dfrac{\widehat{a}-\widehat{b}}{2}$.

Toutes ces formules sont démontrées directement par des preuves géométriques ; elles gardent un aspect strictement utilitaire, l'objectif étant l'obtention d'un algorithme ou d'une formule permettant de faire effectivement le calcul nécessaire. Elles jettent cependant les bases du calcul trigonométrique, sans toutefois que la trigonométrie accède au statut de chapitre autonome des mathématiques.

Établissement de tables trigonométriques : valeurs exactes valeurs approchées

Un certain nombre de calculs de cordes sont ramenés à des équations algébriques, quadratiques — comme le calcul de la corde de 36° qu'al-Bîrūnî ramène à la résolution de l'équation $R^2 = x^2 + Rx$ — ou du troisième degré, équations que les mathématiciens arabes tenteront de résoudre soit algébriquement, soit géométriquement, soit par valeurs approchées ; al-Bîrūnî par exemple, dans le livre III du *Qanun al-Mas'ūdi* consacré à la trigonométrie plane et sphérique, montre que $\dfrac{\mathrm{Crd}\,80°}{\mathrm{Crd}\,40°}$ est solution de $1 + 3x = x^3$, et que Crd 20° est solution de $x^3 + 1 = 3x$.

Dans cet ouvrage, écrit après son séjour en Inde, al-Bîrūnî, donne une table des sinus d'une précision jamais encore atteinte à cette époque dans les calculs trigonométriques. Il y met en œuvre diverses formules d'interpolation quadratique d'origine indienne, dont celle qui se trouve dans le *Khandakhædyaka* de Brahmagupta, œuvre qu'il connaissait bien et cite souvent dans ses écrits. Al-Birūnî n'énonce pas seulement des méthodes d'interpolation pour telle ou telle fonction trigonométrique, mais les généralise à toutes les fonctions, s'efforce d'en établir les démonstrations et enfin compare ces méthodes entre elles[15]. Ses travaux seront poursuivis par al-Samaw'al (XII^e^ siècle) et al-Kæshî (XV^e^ siècle), une des dernières figures de la science de l'Islam, qui fut directeur de l'observatoire de Samarqand à l'époque d'Uluh Beg. Dans un texte qui ne nous est connu que par un commentaire des tables astronomiques d'Ulugh Bey, al-Kashî montre que Sin 1° est solution de l'équation $45.60x = x^3 + 15.60$ Sin 3°, équation dont il donne une solution approchée en étudiant la limite de la suite $u_n = \dfrac{u_{n-1}{}^3 + 15.60\,\mathrm{Sin}\,3°}{45.60}$.

Inversement, des tables de sinus ou de cordes pourront être utilisées pour déterminer des valeurs approchées de certaines équations cubiques : al-Khayyæm (1048-1131 environ) par exemple, dans le *Traité sur la division du quart de cercle*, ramène le problème posé à une équation du troisième degré ($x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$) dont il donne une solution géométrique par intersection d'un demi-cercle et d'une hyperbole, puis signale que :

> « Celui qui veut connaître ceci par le calcul ne dispose d'aucun chemin pour y parvenir s'il exige de l'exactitude ; en effet, dans les choses qui peuvent être déterminées par les sections coniques, on ne peut pas, en analysant, parvenir au calcul ; mais si l'on se contente d'approximations, que

15 R. Rashed, « Al-Samaw'al, al-Bîrūnî et Brahmagupta : les méthodes d'interpolation » *Arabic Sciences an Philosophy*, vol. 1, n° 1, mars 1991, p. 101-160.

l'on s'en remette aux tables des cordes de l'ouvrage de l'*Almageste*, ou aux tables des sinus et des flèches d'un *zîj* digne de confiance[16]…»

Études de variations

La formule d'interpolation qui figure dans l'*Almageste* de Ptolémée : si $\widehat{a} < \widehat{b}$ alors $\dfrac{\text{Crd}\,\widehat{b}}{\text{Crd}\,\widehat{a}} < \dfrac{\widehat{b}}{\widehat{a}}$ (décroissance de la fonction $f : x \to \dfrac{\sin x}{x}$ sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$) va susciter des travaux originaux..

Al-Sifizî (fin X^{e} siècle) tout d'abord, dans un traité intitulé *Pour aplanir les voies en vue de déterminer les propositions géométriques*, reprend cette formule et en donne quatre démonstrations, son objectif dans ce traité étant de faire ressortir les difficultés rencontrées sur la voie de l'analyse et de montrer la diversité des chemins possibles pour parvenir au but.

Ibn al-Haytham (mort après 1040), dans un traité intitulé *Sur le cadran solaire*[17], montre que, si $\widehat{b} < \widehat{a} < \dfrac{\pi}{4}$, alors $\dfrac{\text{Sin } 2\widehat{b}}{\text{Sin } \widehat{b}} > \dfrac{\text{Sin } 2\widehat{a}}{\text{Sin } \widehat{a}}$ (décroissance de la fonction $f : x \to \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$ sur $[0, \dfrac{\pi}{4}]$). Sa démonstration, outre la formule de Ptolémée fait également intervenir le théorème de Ménélaüs dans le plan.

Il en déduit ensuite que, si $\widehat{b} < \widehat{a} < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\dfrac{\text{Sin } \widehat{b}}{\text{Sin } k\widehat{b}} > \dfrac{\text{Sin } \widehat{a}}{\text{Sin } k\widehat{a}}$ avec $k < 1$ (décroissance sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ de la fonction $g : x \to \dfrac{\text{Sin } x}{\text{Sin } kx}$). Il reprend cette proposition dans le traité sur *La configuration des mouvements de chacun des sept astres* et en donne un corollaire équivalant à montrer la décroissance de la fonction $h : x \to \dfrac{\text{Sin}(1+k)x}{\text{Sin } kx}$ sur $[0, \dfrac{\pi}{2(1+k)}]$.

Il généralise également dans ce même traité les propositions III 9 et III 10 des *Sphériques* de Théodose de Tripoli[18], et étudie les variations de l'inclinaison et de l'ascension droite : il montre, par un habile prolongement par continuité, que l'une est une fonction convexe de la longitude et l'autre une fonction concave[19].

---

16 R. Rashed & B. Vahabzadeh, *Al-Khayyâm mathématicien*, Blanchard, Paris, 1999, p. 266.

17 R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. V*, Ibn al-Haytham, astronomie, géométrie sphérique et trigonométrie*, al-Furqæn, Londres, 2006.

18 *Les sphériques de Théodose de Tripoli*, trad. P. Ver Eecke, rééd. Blanchard, Paris, 1959.

19 R. Rashed, « The celestial kinematics of Ibn al-Haytham » *Arabic sciences and Philosophy*, vol. 17, n° 1.