LES MATHÉMATIQUES INFINITÉSIMALES: D'ARCHIMÈDE À IBN AL-HAYTHAM

Hélène BELLOSTA*

Cet article a été publié dans le livre "*L'histoire des sciences arabes–Interaction scientifique des cultures*". La Commission Nationale de l'Unesco, la Société Libanaise d'Histoire des Sciences Arabes, et l'ALESCO, Beyrouth (Une version arabe est disponible); (en français, pp. 147-164, en arabe, pp. 151-172) (Actes du colloque arabo-européen: « Histoire *des Sciences Arabes : Interaction Scientifique des Cultures* » organisé par « L'Équipe d'Étude et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe » (CNRS - Liban et Univ. Libanaise), en coopération avec le « Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales » (CNRS - France et Univ. Paris VII), Tripoli-Liban, 30 oct. – 1 nov. -2002.

* CNRS – Paris.

LES MATHÉMATIQUES INFINITÉSIMALES: D’ARCHIMÈDE À IBN AL-HAYTHAM

Hélène BELLOSTA[*]

Ce que l’on désigne sous le nom de mathématiques infinitésimales porte, avant que se constitue le calcul infinitésimal, sur la détermination des aires et des volumes de surfaces et de solides courbes, ainsi qu’à la recherche des valeurs extrémales pour les courbes et les surfaces (isopérimètres, isépiphanes). Ce chapitre des mathématiques se situe dans la postérité des travaux de l’un des plus grands mathématiciens de l’Antiquité gréco-hellénistique, Archimède. L’intérêt pour son œuvre s’est manifesté à Constantinople au VI^e siècle, ce qui a influé sur l’état du corpus archimédien: les textes qui nous sont parvenus en grec ne sont sans doute pas sous leur forme originale, mais sont une réécriture faite à Constantinople au VI^e siècle dans l’école d’Isidore de Millet. Ceci explique sans doute aussi que l’œuvre d’Archimède[(1)] ait été, contrairement aux œuvres d’Euclide et d’Apollonius, peu traduite en arabe.

Paradoxalement, cette œuvre, quoique peu traduite, a impulsé dans le monde arabe, du IX^e au XI^e siècle, tout un courant de recherches à la pointe des mathématiques du temps: déterminations infinitésimales (aire du cercle, de l’ellipse et de la sphère, aire du segment de parabole, volume du paraboloïde de révolution …), valeurs extrémales, mais également étude des centres de gravité de certaines figures, construction de l’heptagone régulier ainsi que d’autres problèmes solides (c’est-à-dire non solubles à la règle et au compas); on ne peut qu’être frappé par le contraste entre le petit nombre des travaux d’Archimède traduits en arabe -essentiellement les traités *De la sphère et du cylindre* et *De la mesure du cercle*- et l’influence créatrice qu’il a exercée, du neuvième au onzième siècle, sur les mathématiciens les plus prestigieux.

Cependant ce chapitre des mathématiques était, jusqu’aux travaux récents de Roshdi Rashed, totalement ignoré des historiens des mathématiques pour qui l’histoire, ou la préhistoire, de l’intégration passait directement d’Archimède à Kepler, Cavalieri, Grégoire de Saint Vincent …, c’est à dire de l’antiquité grecque à l’Europe des XVI^e et XVII^e

---

[*] CNRS – Paris.

(1) *Les œuvres complètes d’Archimède*, trad. P. Ver Eecke, 2 vol., Paris, 1960.

siècles[2]. Ce chapitre des mathématiques est sorti de l'ombre grâce aux deux ouvrages fondateurs que Roshdi Rashed vient de lui consacrer: *Les mathématiques infinitésimales du* IX^{e} *au* XI^{e} *siècle*, vol. I, *Fondateurs et commentateurs*, vol. II, *Ibn al-Haytham*[3]. Ces deux ouvrages offrent à l'historien des sciences l'édition critique, la traduction française et un commentaire de l'ensemble des textes arabes traitant de mathématiques infinitésimales; leur ambition est de "dégager l'enchaînement des travaux … d'enchâsser <les créations individuelles> dans les traditions qui les ont vu naître" afin d'identifier et de restituer la tradition de cette recherche en mathématiques infinitésimales et de dégager son style[4].

Cet article a pour objet de tenter de mettre en évidence deux aspects novateurs de ces œuvres: montrer d'une part comment l'utilisation nouvelle des transformations ponctuelles (affinités orthogonales, homothéties, transformations affines quelconques) a permis de gagner en simplicité et en élégance; étudier d'autre part comment les méthodes archimédiennes, retrouvées pour l'essentiel par ces mathématiciens, ont été généralisées et infléchies dans un sens arithmétique; ceci afin de montrer, dans l'esprit des travaux de Roshdi Rashed, comment la lecture d'Archimède à la lumière des *Coniques* d'Apollonius aboutit dans une certaine mesure à la fusion des deux courants archimédien (géométrie de mesure) et apollonien (géométrie de position) et donne le jour à ce qu'il est alors légitime d'appeler une tradition néo-archimédienne.

1. L'usage des transformations géométriques.

Les exemples les plus intéressants de l'usage de transformations géométriques dans des calculs d'aires se rencontrent dans deux traités: le traité sur *Les sections du cylindre* de Thābit ibn Qurra[5] (mort en 901) et le traité sur *La quadrature de la parabole* de son petit fils Ibrāhīm ibn Sinān (909 - 946).

a. Le calcul de l'aire de l'ellipse par Thābit ibn Qurra à l'aide d'une affinité orthogonale.

---

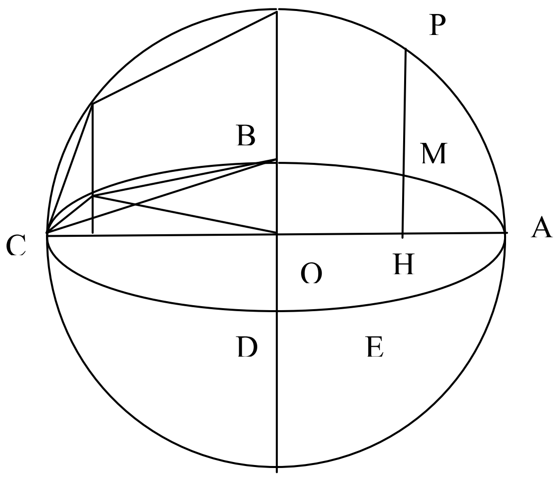
(2) Une des raisons de cette ignorance tient au fait que, de par leur difficulté intrinsèque, ces ouvrages, à l'exception du premier et du plus accessible d'entre eux, le traité des Banū Mūsā *Sur la mesure des figures planes et sphériques*, n'ont guère été traduits en latin et sont restés, de ce fait, largement ignorés de l'Europe.

(3) R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du* IX^{e} *au* XI^{e} *siècle*, vol. I, *Fondateurs et commentateurs*, vol II, *Ibn al-Haytham*, Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, Londres 1996, 1994.

(4) R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. I, pp. V - VI.

(5) R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales*, vol. I, pp. 139 - 147, 458 - 673.

Dans le traité sur *Les sections du cylindre* Thābit fait intervenir des transformations ponctuelles (projections cylindriques, affinités orthogonales, homothéties) dont il démontre et utilise certaines propriétés; ce traité qui va infléchir la recherche en géométrie dans une nouvelle direction a eu une influence profonde sur les œuvres de ses successeurs, en particulier sur le traité que son petit fils Ibn Sinān a consacré à la quadrature de la parabole. L'étude du cylindre et des sections cylindriques que l'on trouve dans le traité de Thābit est calquée sur l'étude du cône et des sections coniques menée par Apollonius dans *Les Coniques*(6): les droites passant par le sommet du cône sont remplacées par les droites parallèles à une génératrice du cône, ce qui revient sans le dire à considérer le cylindre comme un cône dont le sommet est rejeté à l'infini. Dans ce traité Thābit calcule l'aire de l'ellipse à partir de l'aire du cercle, à l'aide d'une affinité orthogonale dont il démontre certaines propriétés:



Propriété 1: l'ellipse E de grand axe $AC = 2a$ de petit axe $BD = 2b$ est l'image du cercle C de diamètre AC par l'affinité orthogonale d'axe AC de rapport $\dfrac{BD}{AC}$ et réciproquement le cercle C est l'image de l'ellipse E par

(6) Thābit est le premier mathématicien de cette tradition à bien connaître *Les Coniques* d'Apollonius -ce qui n'était pas le cas des Banū Mūsā- puisqu'il en a traduit les livres 5 à 7.

l’affinité orthogonale d’axe AC et de rapport $\frac{AC}{BD}$ (en effet quelle que soit la droite PMH orthogonale à AC -M sur l’ellipse E, P sur le cercle C- Thābit montre que $\frac{AC}{BD} = \frac{PH}{HM}$).

<u>Propriété 2</u>: l’affinité orthogonale d’axe AC qui transforme l’ellipse E en le cercle C transforme tout polygone inscrit dans l’ellipse en un polygone inscrit dans le cercle, le rapport des aires de ces polygones étant égal au rapport de l’affinité $\frac{AC}{BD}$.

Thābit est alors en mesure de montrer, par la méthode d’exhaustion, que l’aire de l’ellipse E est égale à l’aire du cercle C ’ de rayon $\sqrt{ab}$:

1. Si aire E > aire C’

On construit, à partir du quadrilatère $P_2 = ABCD$ et par dichotomies successives, une suite de polygones P_n à 2^n sommets, inscrits dans l’ellipse E: entre deux sommets consécutifs A_i et A_{i+1} du polygone P_n on définit un sommet du polygone P_{n+1} point d’intersection du petit arc d’ellipse A_iA_{i+1} et de la droite joignant le centre de l’ellipse au milieu du segment $[A_iA_{i+1}]$; d’après la propriété I, 17 des *Coniques* d’Apollonius, la tangente en ce point est parallèle à la corde A_iA_{i+1}. On montre ensuite qu’il existe un polygone P_n d’aire S_n tel que:

$$\text{aire E} - S_n < \text{aire E} - \text{aire C}',$$

d’où

aire C' < S_n< aire E (voir *infra*, remarque 2).

Soit P'_n d’aire S'_n l’image de P_n par l’affinité orthogonale qui transforme E en C.

[$\frac{S'_n}{S_n} = \frac{a}{b} = \frac{\text{aireC}}{\text{aireC}'}$ et S_n> aire C'] $\Rightarrow$ [S'_n > aire C], ce qui est faux puisque P'_n est inscrit dans C.

2. Si aire E < aire C’

On pose $\frac{\text{aireE}}{\text{aireC}'} = \frac{\text{A}}{\text{aireC}}$ (en admettant implicitement l’existence d’une quatrième proportionnelle pour les aires) avec A < aire C; il existe donc un polygone P'_n d’aire S'_n inscrit dans le cercle C tel que: aire C- S'_n< aire C-A (démontré dans la proposition 2 du livre XII des *Éléments* d’Euclide), d’où A < S'_n < aire C.

P'_n est l’image par l’affinité qui transforme E en C d’un polygone P_n d’aire S_n inscrit dans E.

[$\frac{S'_n}{S_n} = \frac{a}{b} = \frac{\text{aireC}}{\text{aireC'}} = \frac{\text{A}}{\text{aireE}}$ et $S'_n > A$] $\Rightarrow$ [$S_n >$ aire E], ce qui est faux puisque P_n est inscrit dans E.
Conclusion: aire E = aire C'.

Remarque 1: Dans le traité *Des Conoïdes et Des Sphéroïdes* -non traduit en arabe- Archimède démontre (avec les notations précédentes) que $\frac{\text{aireE}}{\text{aireC}} = \frac{b}{a}$ (il ne "calcule" donc pas à proprement parler l'aire de l'ellipse[(7)]). Sa démonstration repose sur les mêmes propriétés que celle de Thābit (la propriété $\frac{AC}{BD} = \frac{PH}{HM}$ déduite du *syntagma* de l'ellipse, la proportionnalité des aires des polygones à 2^n côtés inscrits respectivement dans le cercle C et dans l'ellipse E et qui se correspondent dans l'affinité orthogonale d'axe *AC* qui transforme le cercle en l'ellipse), mais son raisonnement par exhaustion, qui repose sur la proposition 2 du livre XII des *Éléments* d'Euclide, nécessite le passage intermédiaire par des polygones réguliers à 2^n côtés inscrits dans un cercle C' tel que $\frac{a}{b} = \frac{\text{aireC}}{\text{aireC'}}$ (ce cercle a donc la même aire que l'ellipse E, mais Archimède ne précise pas son rayon). Si l'affinité orthogonale qui transforme le cercle C en l'ellipse E est bien présente en filigrane dans la démonstration d'Archimède, sa présence effective est masquée par le détour par le polygone inscrit dans le cercle C'.

Grâce à l'usage des homothéties Thābit obtient également dans le traité sur *Les sections du cylindre* le premier théorème traitant du périmètre de l'ellipse; il montre tout d'abord que deux ellipses semblables, de même centre, d'axes colinéaires, sont homothétiques; il en déduit, par la méthode d'exhaustion, que les rapports des périmètres

---

(7) Cet aspect plus calculatoire de la formulation des résultats est un des éléments de cette tradition néo-archimédienne arabe; on le constate déjà dans le traité *Sur la mesure des figures planes et sphériques* des frères Banū Mūsā (comparer par exemple en ce qui concerne l'aire du cercle leur formulation "pour tout cercle le produit de son demi-diamètre par son demi-périmètre est égal à son aire" et celle d'Archimède "tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à sa base").
Archimède, *Œuvres complètes*, vol. I, "De la mesure du cercle", p. 127.
R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. I, Banū Mūsā, "Livre pour connaître la mesure des figures planes et sphériques", p. 68.

d'ellipses semblables sont égaux aux rapports de leurs axes - chaque axe à son homologue[8].

b. Le calcul de l'aire du segment de parabole par Ibrāhīm ibn Sinān à l'aide d'une transformation affine quelconque.

Ibrāhīm ibn Sinān, petit fils de Thābit ibn Qurra[9] va mettre en œuvre dans son traité sur *La quadrature de la parabole*, les idées maîtresses de la démonstration précédente, et ce de façon un peu plus générale, en utilisant dans son calcul de l'aire du segment de parabole une transformation affine quelconque[10]. Le traité d'Ibn Sinān s'inscrit ainsi non dans la postérité du traité sur *La quadrature de la parabole* de Thābit, ni, et pour cause, dans celle du traité sur *La quadrature de la parabole* d'Archimède, puisque ce traité n'a pas été traduit en arabe, mais bien dans celle du traité *Sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale* de Thābit.

Ibn Sinān définit tout d'abord, de la façon la plus générale, une transformation affine: si H et H' sont les projetés respectifs de M et M' sur

---

[8] Le calcul du périmètre de l'ellipse, qui ne peut s'exprimer simplement, est à l'origine, à la fin du XIX[e] siècle, de la théorie des fonctions elliptiques (Weierstrass) qui jouent un rôle important en théorie des nombres, en géométrie algébrique et en analyse.

Ibn al-Haytham, dans son traité *Sur la sphère qui est la plus grande des figures solides ayant des périmètres égaux et sur le cercle qui est la plus grande des figures planes ayant des périmètres égaux*, fait également usage d'homothéties dans l'espace pour démontrer certaines propriétés de l'angle solide.

R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. II, chap. III "Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes et l'étude de l'angle solide", pp. 331 - 459.

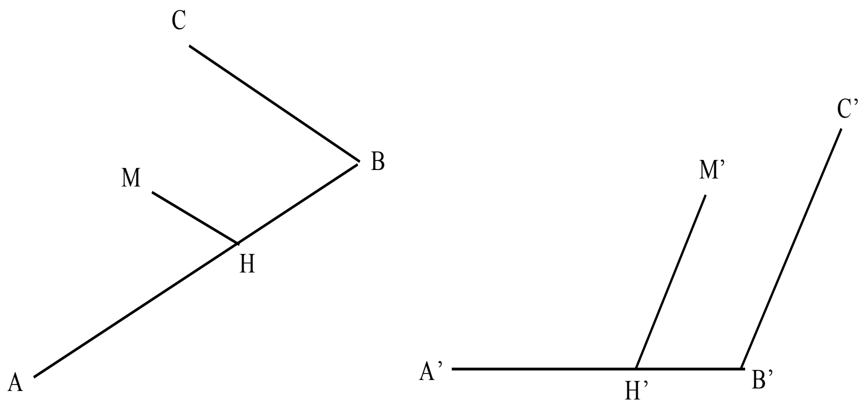
[9] R. Rashed a édité et traduit dans le tome I de *Mathématiques infinitésimales* deux versions de ce traité sur *La quadrature de la parabole*: la première, qu'Ibn Sinān lui-même croyait avoir perdue, et une seconde version, rédigée quelques années plus tard pour pallier à cette perte. Ces deux versions d'une même démonstration permettent de suivre l'évolution de la pensée et des techniques démonstratives de ce grand mathématicien: la deuxième version est plus élégante et plus générale, les calculs y sont plus rapides, toutes les scories de la première version y sont éliminées. Cet exemple rarissime (il est très rare qu'un mathématicien donne deux versions successives d'une même démonstration) permet de voir comment fonctionne la création mathématique.

R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. I, chap. III, "Ibn Sinān, critique d'al-Māhānī: aire de la parabole", pp. 675 - 735.

Outre le traité sur *La quadrature de la parabole*, Ibn Sinān nous a laissé d'importants travaux en géométrie et en logique. R. Rashed & H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān, Logique et géométrie au X[e] siècle*, Brill, Leyden, 2000.

[10] Une transformation affine quelconque est une transformation ponctuelle (du plan ou de l'espace) qui conserve le barycentre. Une transformation affine plane (isométrie, similitude, affinité, etc.) est déterminée de façon unique par la donnée de trois points non alignés et de leurs images; elle est bijective si les trois images ne sont pas alignées.

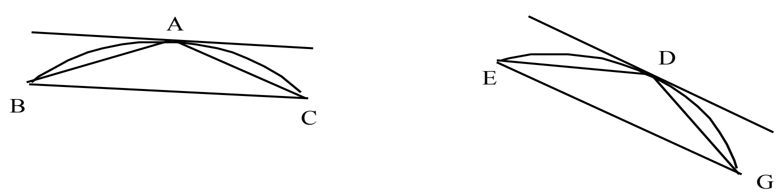
les droites (AB) et ($A'B'$) parallèlement aux droites (BC) et ($B'C'$) et si $\frac{BH}{BA} = \frac{B'H'}{B'A'}$ et $\frac{HM}{BC} = \frac{H'M'}{B'C'}$, alors M' est l'image de M par la transformation affine qui transforme les trois points A, B et C en les trois points A', B' et C' (à condition que AHB et $A'H'B'$ soient rangés dans le même ordre et que BC et HM d'une part, $B'C'$ et $H'M'$ d'autre part, soient semblablement disposées relativement à AB et $A'B'$, ceci pour pallier à l'absence de mesures algébriques).



Ibn Sinān démontre ensuite deux propriétés de ces transformations affines:

<u>Proposition 1</u>: toute transformation affine bijective conserve le rapport des aires des triangles et des polygones (soit ABC un triangle, P_n un polygone, d'aire S_n, $A'B'C'$ et P'_n, d'aire S'_n, leurs images par une transformation affine quelconque, alors $\frac{S'_n}{\text{aire}\,A'B'C'} = \frac{S_n}{\text{aire}\,ABC}$).

Cette proposition énonce ainsi une remarquable propriété métrique d'une transformation affine: une transformation affine qui ne conserve les rapports de longueurs que dans une direction donnée possède néanmoins la propriété métrique étonnante de conserver les rapports d'aires.



Proposition 2: toute transformation affine bijective transforme un arc de parabole en un arc de parabole dont la base est l'image de la base et le sommet l'image du sommet.

Ibn Sinān est alors en mesure d'en déduire, par la méthode d'exhaustion, que le rapport des aires de deux segments de paraboles est égal au rapport des aires des triangles ayant même base et même sommet: *ABC* et *DEG* étant deux arcs de paraboles de bases *BC* et *EG* et de sommets respectifs *A* et *D* alors:

$$\frac{\mathrm{tr}\,DEG}{\mathrm{tr}\,ABC} = \frac{\mathrm{prb}\,DEG}{\mathrm{prb}\,ABC}.$$

Posons $\frac{\mathrm{tr}\,DEG}{\mathrm{tr}\,ABC} = \frac{\mathrm{prb}\,DEG}{J}$ (en admettant encore implicitement l'existence d'une quatrième proportionnelle pour les aires), on veut montrer que $J = \mathrm{prb}\,ABC$.

1. Si $J < \mathrm{prb}ABC$

Soit P_n une suite de polygones à 2^n sommets inscrits dans l'arc de parabole *ABC*, d'aire S_n, définis en prenant chaque fois la moitié des cordes précédentes et le sommet correspondant de l'arc de parabole (point où la tangente est parallèle à la corde); il existe un polygone P_n tel que:

$$\mathrm{prb}ABC - S_n < \mathrm{prb}ABC - J, \text{ soit } J < S_n < \mathrm{prb}ABC$$

(voir *infra*, remarque 2).

Soit P'_n d'aire S'_n , l'image de P_n par la transformation affine (bijective) qui transforme le triangle *ABC* en le triangle *DEG* (et donc aussi le segment de parabole *ABC* en le segment de parabole *DEG*), P'_n est donc inscrit dans l'arc de parabole *DEG*. On a

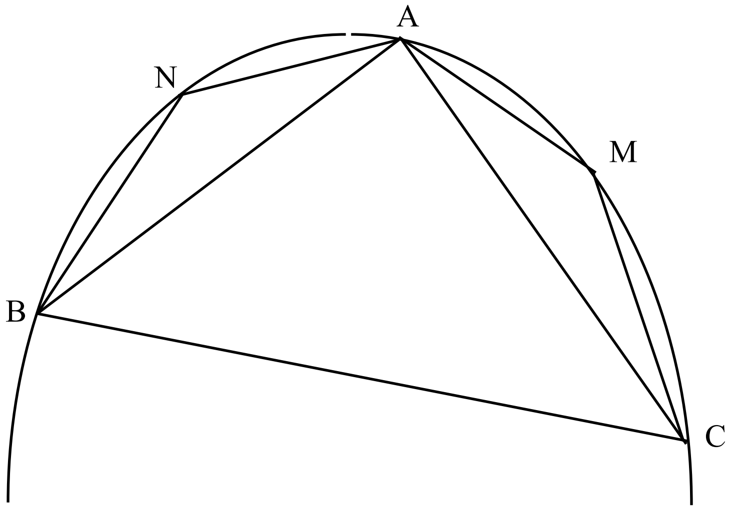
$$\left[\frac{S'_n}{S_n} = \frac{\mathrm{tr}\,DEG}{\mathrm{tr}\,ABC} = \frac{\mathrm{prb}DEG}{J} \text{ et } J < S_n\right] \Rightarrow [\mathrm{prb}DEG < S'_n],$$

ce qui est faux puisque P'_n est inscrit dans l'arc de parabole *DEG*.

2. Si $J > \mathrm{prb}ABC$

On inverse les rapports et on pose $\frac{\mathrm{tr}\,ABC}{\mathrm{tr}\,DEG} = \frac{\mathrm{prb}ABC}{K}$ avec $K<\mathrm{prb}DEG$, ce qui d'après la démonstration précédente est également impossible.

Donc $J = \mathrm{prb}ABC$.



Conclusion**:** prb$ABC = \frac{4}{3}$ trABC.

En effet: trABC = 8.trAMC [11], d'où prbABC = 8.prbAMC; de même prbABC = 8.prbANB, or prbABC = trABC + prbAMC + prbANB, d'où tr$ABC = \frac{3}{4}$ prbABC et prb$ABC = \frac{4}{3}$ trABC.

Remarque 2: Ces démonstrations par exhaustion, tant celle de Thābit que celle d'Ibn Sinān, reposent sur la possibilité de construire un polygone P_n inscrit dans une figure donnée F (ellipse ou segment de parabole) et dont l'aire S_n diffère de moins d'une aire donnée de l'aire de cette figure F[12]. L'existence d'un tel polygone se déduit de deux propriétés:

- un lemme, démontré par Thābit pour l'ellipse et par Ibn Sinān pour la parabole montrant que, si *ABC* est un arc de parabole (respectivement un arc d'ellipse plus petit qu'une demi-ellipse), *A* le point de l'arc *BC* où la tangente est parallèle à la corde *BC*, alors:

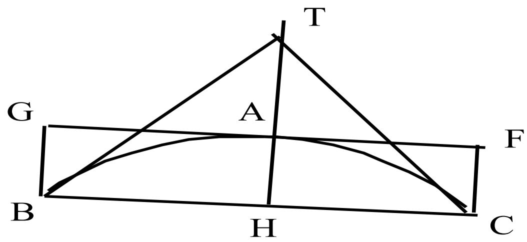
tr$ABC > \frac{1}{2}$ prbABC (respectivement tr$ABC > \frac{1}{2}$ ellABC)[13];

---

(11) Cette propriété, que démontre Ibn Sinān, n'est autre que la proposition 21 du traité d'Archimède, non traduit en arabe, *Sur La quadrature de la parabole*. Archimède, *Œuvres complètes*, vol II, pp. 398 - 399.

(12) Cette propriété a été démontrée par Euclide pour le cercle (*Éléments*, X, 2).

(13) C'est la proposition 20 du traité d'Archimède sur *La quadrature de la parabole*. Notons que pour que ce lemme soit vrai, il suffit que l'arc *ABC* soit situé à l'intérieur du parallélogramme *BCFG*, il est donc également vrai en particulier pour tout arc d'hyperbole. Archimède, *Œuvres complètes*, vol. II, pp. 397 - 398.



- la proposition 1 du livre X des *Éléments* d'Euclide: *deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande on retranche une partie plus grande que sa moitié, si du reste on retranche une partie plus grande que sa moitié, et ainsi de suite, il restera enfin une certaine grandeur qui sera moindre que la plus petite des grandeurs proposées*.

On déduit de ces deux propositions la proposition qui est à la base de toutes ces démonstrations: on peut inscrire dans le segment de parabole (respectivement dans l'ellipse), par divisions par 2 successives, un polygone tel que la différence entre l'aire du segment de parabole (respectivement de l'ellipse) et l'aire de ce polygone soit inférieure à toute aire donnée.

La proposition X.1 des *Éléments* d'Euclide qui est à la base de tous ces passages à la limite est généralisée dans un premier temps par Thābit; il démontre, dans la proposition 31 du traité *Sur la mesure du paraboloïde* qu'une suite (a_p) telle que $a_p = a.(1 - k)^p$, tend vers 0 ($0 < k < 1$). À sa suite Ibn al-Haytham consacre également un court traité à la généralisation de cette propriété fondamentale (*Sur la division de deux grandeurs différentes mentionnées dans la première proposition du dixième livre de l'ouvrage d'Euclide*) dans lequel il montre que la suite $a.(1- k)^p$ tend vers 0 ($0 < k < 1$) [(14)].

Les deux démonstrations que nous venons d'étudier, celle de Thābit et celle d'Ibn Sinān sont des démonstrations purement géométriques dans lesquelles les aires des polygones inscrits dans la figure dont on souhaite calculer la surface ne sont pas décomposées en sommes d'aires d'éléments plus petits; ces démonstrations ne nécessitent donc aucun lemme arithmétique. L'élégance de ces méthodes géométriques porte cependant en elle ses propres limites dans la mesure où elles ne sont guère susceptibles d'être généralisées à d'autres courbes[(15)]; vont donc fleurir

[(14)] R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. I, pp. 299 - 305, 412 - 416, vol. II, pp. 324 - 329.

[(15)] Si une partie des résultats d'Ibn Sinān est susceptible d'être généralisée à d'autres courbes, et en particulier à d'autres sections coniques (toute transformation affine bijective simultanément d'autres méthodes, souvent plus lourdes -faisant intervenir de nombreux lemmes arithmétiques- mais plus susceptibles d'être généralisées.

2. L'arithmétisation des méthodes.

Ces méthodes dans lesquelles on décompose l'aire (ou le volume) des polygones (ou des solides) qui approximent l'aire ou le volume cherché, en des sommes d'aires (ou de volumes) d'éléments plus petits - préfiguration des sommes intégrales- nécessitent tout un arsenal de formules arithmétiques (somme des *n* premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes, de leurs puissances quatrièmes, etc.). Un des premiers exemples en est fourni par le traité de Thābit ibn Qurra *Sur la mesure de la parabole*.

a. Le calcul par Thābit ibn Qurra de l'aire du segment de parabole et le calcul du volume du segment de paraboloïde de révolution.

Dans le traité *Sur la mesure de la parabole*(16), première contribution du monde arabe à ce sujet, Thābit calcule l'aire d'un segment de parabole à l'aide de 20 lemmes, dont 11 lemmes arithmétiques, parmi lesquels:

* $\sum_{1}^{n} 2p-1 = n^2$, somme des *n* premiers entiers impairs, formule démontrée par descente finie (on montre par une récurrence archaïque(17) que:

$$2^2 - 1^2 = 3,\ 3^2 - 2^2 = 5,\ [n^2 - (n-1)^2] = 2n - 1,\ \ldots$$

puis on ajoute les termes).

---

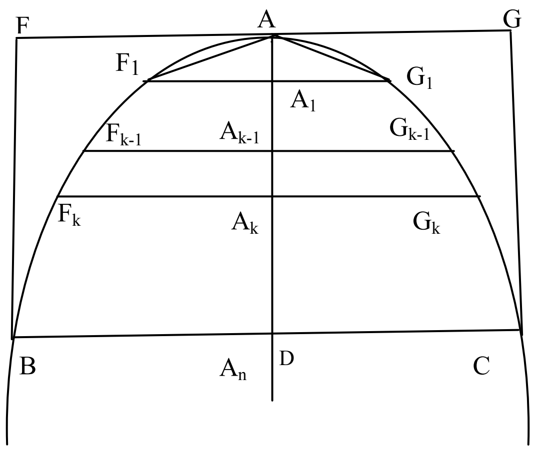
transforme un arc de conique en un arc de conique de même nature, de base l'image de la base et de sommet l'image du sommet, et toute transformation affine bijective conserve le rapport des aires des segments de coniques), le lemme sur lequel repose la fin de la démonstration d'Ibn Sinān (trABC = 8 trAMC, A étant le point de l'arc BC où la tangente est parallèle à la corde BC, M le point de l'arc AC où la tangente est parallèle à la corde AC) n'est, lui, pas susceptible de généralisation, le rapport $\frac{\mathrm{tr}\,AMC}{\mathrm{tr}\,ABC}$ n'étant, en général, pas un rapport constant mais dépendant des positions respectives des points B et C sur l'arc de courbe considéré.

(16) R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. I, pp. 151- 271.

(17) On montre que cette propriété est vraie pour les quatre premiers termes, en mettant chaque fois en évidence la relation de récurrence, puis on dit "et ainsi de suite de proche en proche", Pascal ne procèdera pas autrement.

* $\sum_{1}^{n}(2p-1)^2 = \frac{4n^3}{3} - \frac{n}{3}$, somme des carrés des n premiers entiers impairs, formule établie par descente finie et récurrence archaïque.

Soit BAC un arc de parabole de sommet A (point où la tangente GF est parallèle à la corde BC), D le milieu de BC (AD est un diamètre de la parabole et les droites parallèles à BC sont les ordonnées relatives à ce diamètre), $BFGC$ le parallélogramme construit sur cet arc de parabole (avec BF // AD // CG) -ne pas supposer $BC \perp AD$ revient seulement à introduire dans tous les calculs d'aires un facteur multiplicatif, le sinus de l'angle ADB-, alors l'aire S du segment BAC est égale aux $\frac{2}{3}$ de l'aire du parallélogramme $BFGC$.



On construit une suite de polygones P_n, d'aire S_n, inscrits dans l'arc de parabole BAC de la façon suivante: soit $A_0 = A$, A_1, …, $A_n = D$, une subdivision de l'intervalle AD telle que:

$\frac{A_0A_1}{1} = \ldots \frac{A_{k-1}A_k}{2k-1} = \ldots = \frac{A_{n-1}A_n}{2n-1}$, soient F_k et G_k les points de la parabole correspondant à A_k (F_kG_k // BC), P_n est le polygone $BF_{n-1}\ldots F_1AG_1\ldots G_{n-1}C$.

Propriété 1: $\frac{2}{3}$ paral$BFGC$ est une borne supérieure de la suite (S_n).

Le calcul de la somme des aires des trapèzes $F_{k-1}G_{k-1}G_kF_k$ montre, en utilisant les lemmes arithmétiques et les propriétés de la parabole, que:

$S_n = \frac{2}{3}$ paral$BFGC$ - $\frac{1}{6n^2}$ paral$BFGC$, d'où le résultat.

<u>Propriété 2</u>: S est une borne supérieure de la suite (S_n).

Si l'on pose $b_k = F_kG_k$, alors $\frac{b_1}{2} = \ldots = \frac{b_k}{2k} = \ldots = \frac{b_n}{2n}$, le polygone P_n est donc également obtenu par dichotomies successives de l'arc *BC* (comme dans la démonstration d'Ibn Sinān, voir *supra*); la proposition 1 du livre X des *Éléments* d'Euclide et la propriété déjà mentionnée de la parabole (voir la remarque précédente) permettent alors de montrer que, quelle que soit la surface ε, on peut trouver un polygone P_n tel que $S - S_n < \varepsilon$.

Conclusion: $S = \frac{2}{3}$ paral*BFGC*.

Cette démonstration par exhaustion revient à démontrer, de façon générale, l'unicité de la borne supérieure.

1. $S > \frac{2}{3}$ paral*BFGC*; il existe un polygone P_n d'aire S_n tel que:

$$S - S_n < S - \frac{2}{3}\,\text{paral}BFGC,$$

d'où $S_n > \frac{2}{3}$ paral*BFGC*, ce qui est faux.

2. $S < \frac{2}{3}$ paral*BFGC*; il existe un polygone P_n d'aire S_n tel que :

$$\frac{2}{3}\,\text{paral}BFGC - S_n < \frac{2}{3}\,\text{paral}BFGC - S,$$

d'où $S_n > S$, ce qui est faux.

Donc $S = \frac{2}{3}$ paral*BFGC*.

Remarque 3: Si l'on compare ces deux démonstrations de la quadrature de la parabole -celle de Thābit et celle d'Ibn Sinān- à celle d'Archimède dans le traité sur *La quadrature de la parabole* -non traduit en arabe- on constate qu'un certain nombres d'éléments communs sont mis en œuvre différemment par ces trois mathématiciens, ce qui a pour conséquence de donner trois démonstrations fort différentes:

1. une même suite de polygones P_n est inscrite dans le segment de parabole ; ils sont définis de la même manière par Archimède et Ibn Sinān -par dichotomies successives à partir du triangle *ABC*- et décomposés en triangles, mais définis de manière différente par Thābit - par subdivision de l'intervalle *AD* en intervalles proportionnels à la suite des entiers impairs- et décomposés en trapèzes;

2. la démonstration (identique chez les trois mathématiciens) du fait que, quelle que soit l'aire ε donnée, il existe un polygone P_n d'aire S_n, tel que: prb*ABC* - S_n < ε, autorise la première partie du raisonnement par exhaustion.

À partir de quoi les trois démonstrations divergent:

L'usage d'une transformation affine dispense Ibn Sinān du calcul de S_n, ainsi que de la seconde partie du raisonnement par exhaustion et lui donne immédiatement le résultat;

Archimède et Thābit calculent S_n et montrent, quant à Archimède que $S_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4^n} = \frac{4}{3}.a$ (si *a* est l'aire du triangle *ABC)*, et quant à Thābit que $S_n = \frac{2}{3}$ paral*BFGC* - $\frac{1}{6n^2}$ paral*BFGC*, d'où ils déduisent par exhaustion, l'un que prb*ABC* = $\frac{4}{3}.a$, l'autre que prb*ABC* = $\frac{2}{3}$ paral*BFGC*.

Si la méthode de Thābit est beaucoup plus lourde que celle d'Archimède, elle est en revanche plus immédiatement généralisable à toute courbe telle que (avec les notations précédentes) l'ordonnée de tout point (A_kG_k) soit donnée en fonction de l'abscisse (AA_k). Émerge chez Thābit, et ce de façon plus générale que chez Archimède, le concept de sommes intégrales, bien que ceci ne figure pas dans les traités de ce dernier traduits en arabe; une lecture attentive des deux seuls traités d'Archimède traduits en arabe a cependant pu en suggérer l'idée à Thābit.

Le procédé de Thābit ibn Qurra pour le calcul du volume du paraboloïde de révolution repose sur les mêmes principes que son calcul de la quadrature du segment de parabole; par rotation de la demi-figure précédente *ADB* autour de l'axe *AD* -que *BD* soit ou non orthogonale à *AD*- il inscrit dans le paraboloïde des troncs de cônes de révolution. Cette démonstration, fort longue et difficile, ne demande pas moins de 36 propositions (dont encore 11 propositions arithmétiques, la dernière d'entre elles étant ensuite étendue aux segments -c'est-à-dire aux réels- et quelques propositions géométriques, volume du tronc de cône et du tronc de cône creux, volume du tronc de losange solide). Thābit montre, comme pour l'aire du segment de parabole, que si V est le volume du paraboloïde et V' le volume du cylindre dont la base est le cercle engendré par la rotation de *B* autour de l'axe *AD* -que *BD* soit ou non orthogonale à *AD*- et dont l'axe est *AD*, axe du paraboloïde, alors V et $\frac{1}{2}$ V' sont deux bornes supérieures de la suite V_n suite des volumes des solides inscrits dans le paraboloïde. L'unicité de la borne supérieure, démontrée par exhaustion, lui permet encore de conclure que V = $\frac{1}{2}$ V'.

Des méthodes de calcul de volumes consistant maintenant à encadrer les volumes cherchés par des cylindres inscrits et circonscrits, préfigurant les sommes de Darboux, et inspirées des encadrements mis en œuvre par Archimède dans les traités *De la mesure du cercle* et *De la sphère et du cylindre* vont également être développées par les géomètres arabes, en particulier al-Qūhī (fin du X^{e} siècle) et Ibn al-Haytham (mort après 1040).

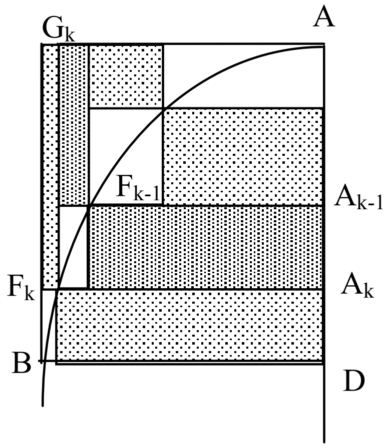
b. Le calcul par al-Qūhī du volume du paraboloïde[18].

Le texte qu' al-Qūhī a consacré au volume du paraboloïde de révolution fait partie d'un vaste projet (malheureusement perdu) sur l'étude des centres de gravité; cette recherche sur les centres de gravité, nécessite la connaissance du volume du paraboloïde; la démonstration de Thābit, seul ouvrage connu d'al-Qūhī sur le sujet (ce qui manifeste ainsi indirectement l'ignorance dans laquelle on se trouvait, à l'époque, du texte d'Archimède *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*), lui paraissant trop difficile, al-Qūhī en donne une démonstration qui, comme celle d'Archimède -qu'il ne connaissait pas-, fait intervenir des cylindres de même hauteur inscrits dans le paraboloïde et circonscrits au paraboloïde et les sommes des volumes de ces cylindres.

Avec les notations précédentes, pour toute subdivision $A_0 = A$, A_1, A_2, … , $A_n = D$ de l'axe AD du paraboloïde, soient F_1, F_2, … F_n les points correspondants de la parabole; al-Qūhī considère les cylindres d'axes $A_{k-1}A_k$ respectivement inscrits dans le paraboloïde et circonscrits au paraboloïde, de bases les cercles engendrés respectivement par la rotation de F_{k-1} et de F_k de volumes respectifs v_k et V_k; soient V' le volume du cylindre circonscrit -d'axe AD de base le cercle engendré par la rotation de B- et V le volume du paraboloïde, al-Qūhī montre d'abord, par une démonstration que l'on peut aisément visualiser et qui le dispense de tout calcul et de tout lemme arithmétique, que:

$$\sum_1^n v_k < \frac{1}{2}\text{V'} < \sum_1^n V_k .$$

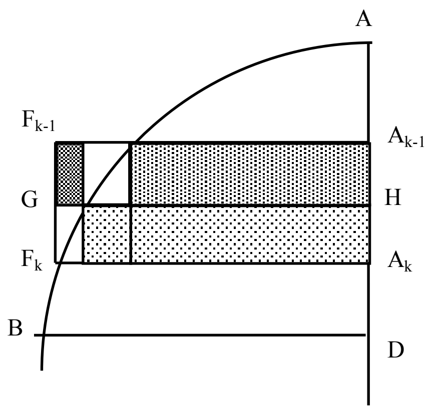
[18] R. Rashed, *Mathématiques infinitésimales*, vol. I, chap V, "Al-Qūhī critique de Thābit: volume du paraboloïde de révolution", pp. 835 - 871.



Soit c_k l'aire du cercle engendré par la rotation de F_k. Du fait que $\frac{AA_{k-1}}{AA_k} = \frac{c_{k-1}}{c_k}$ (*syntagma* de la parabole) on a $AA_{k-1}.c_k = AA_k.c_{k-1}$ qui sont respectivement les volumes des cylindres de base c_k de hauteur AA_{k-1}, et de base c_{k-1} de hauteur AA_k, si *AD* est orthogonale à *BC*; s'il n'en est pas ainsi, ce sont ces volumes multipliés par une constante, le sinus de l'angle *BDA*; le volume du cylindre engendré par la rotation du parallélogramme (A_kF_{k-1}) est alors égal au volume du cylindre creux engendré par la rotation du parallélogramme (G_kF_{k-1}), d'où le résultat.

En outre $\sum_1^n v_k < V < \sum_1^n V_k$, ce qui découle immédiatement des définitions des cylindres inscrits et circonscrits.

Al-Qūhī démontre ensuite que, dans le cas où la subdivision de l'axe *AD* du paraboloïde est obtenue par dichotomies successives ($n = 2^N$), la suite $[\sum_1^n V_k - \sum_1^n v_k]$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; les suites $\sum_1^n v_k$ et $\sum_1^n V_k$ sont donc adjacentes; cette démonstration ne fait pas intervenir la nature particulière de la courbe mais simplement la monotonie de la fonction sous-jacente. Il en déduit alors par exhaustion que $V = \frac{1}{2} V'$, cette démonstration revient à montrer de façon générale l'unicité de la limite commune de deux suites adjacentes:



1. Si $V > \frac{1}{2} V'$

il existe $n = 2^N$ tel que : $\sum_1^n V_k - \sum_1^n v_k < V - \frac{1}{2} V'$, mais $\sum_1^n v_k < \frac{1}{2} V'$ et $\sum_1^n V_k > V$, donc $V - \frac{1}{2} V' < V - \sum_1^n v_k < \sum_1^n V_k - \sum_1^n v_k$ ce qui est faux.

2. Si $V < \frac{1}{2} V'$

il existe $n = 2^N$ tel que : $\sum_1^n V_k - \sum_1^n v_k < \frac{1}{2} V' - V$, mais $\sum_1^n V_k > \frac{1}{2} V'$ et $\sum_1^n v_k < V$, donc $\frac{1}{2} V' - V < \sum_1^n V_k - V < \sum_1^n V_k - \sum_1^n v_k$ ce qui est faux.

Donc $V = \frac{1}{2} V'$.

Dans cette démonstration, la seule partie liée à la nature de la courbe (arc de parabole) et non généralisable telle quelle à d'autres courbes est la démonstration de l'inégalité $\sum_1^n v_k < \frac{1}{2} V' < \sum_1^n V_k$.

c. Le calcul par Ibn al-Haytham du volume du paraboloïde de deuxième espèce.

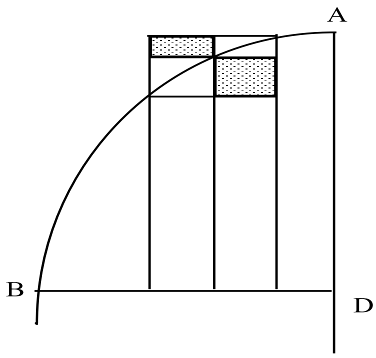
Dernier grand mathématicien de la tradition infinitésimaliste arabe, Ibn al-Haytham est l'auteur de plusieurs traités relevant de ce chapitre : le *Traité sur les lunules*, le *Traité sur la quadrature du cercle*, le *Traité exhaustif sur les figures des lunules*, le *Traité sur la mesure du paraboloïde*, le *Traité sur la mesure de la sphère*, le *Traité sur la sphère qui est la plus grande des figures solides ayant des périmètres* (i. e. des surfaces) *égaux et sur le cercle qui est la plus grande des figures planes* *ayant des périmètres égaux,* tous édités dans le volume 2 de *Mathématiques infinitésimales*.

Le premier groupe de traités, le *Traité sur les lunules*, le *Traité sur la quadrature du cercle*, le *Traité exhaustif sur les figures des lunules*, écrits dans cet ordre, traite de la quadrature des lunules et du cercle ; les deux premiers traités, s'ils n'apportent guère de résultat nouveau, se présentent comme une réflexion sur l'existence et son rapport avec la constructibilité (ce qui est une des préoccupations philosophiques permanentes d'Ibn al-Haytham). Dans le troisième traité sur les figures des lunules, l'étude des lunules est envisagée pour elle même et non plus comme dans le premier traité, comme préambule à la quadrature du cercle, Ibn al-Haytham généralise les résultats obtenus dans le premier traité, multiplie les cas et parvient à de nombreux résultats souvent attribués à des mathématiciens beaucoup plus tardifs. Le second groupe de traités comprend le *Traité sur la mesure du paraboloïde*, et le *Traité sur la mesure de la sphère*. Un dernier traité est consacré au problème des isopérimètres et des isépiphanes.

Dans le *Traité sur la mesure du paraboloïde*, Ibn al-Haytham reprend le calcul du volume du paraboloïde de révolution (sa méthode reprend pour l'essentiel celle d'al-Qūhī, en précisant certains points, en particulier dans les cas où *AD* n'est pas orthogonal à *BC*). Ibn al-Haytham calcule également, pour la première fois dans l'histoire, le volume du solide obtenu en faisant tourner un arc de parabole autour d'un axe parallèle à la tangente au sommet, qu'il nomme "paraboloïde de la seconde espèce" et montre qu'il est égal aux $\frac{8}{15}$ du volume du cylindre circonscrit.

Théorème: Soit AB un arc de parabole de sommet A d'axe $(AD) \perp (BD)$, v le volume du paraboloïde de seconde espèce engendré par la rotation de l'arc AB autour de BD, soit V le volume du cylindre circonscrit (de hauteur BD de base le cercle de rayon AD) alors $v = \frac{8}{15}.V$.

Pour toute subdivision de BD obtenue par dichotomies successives ($n = 2^N$), Ibn al-Haytham considère les cylindres inscrits et circonscrits de volumes v_p et V_p, et montre comme al-Qūhī que la suite $[\sum_1^n V_k - \sum_1^n v_k]$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; les suites $\sum_1^n v_k$ et $\sum_1^n V_k$ sont donc adjacentes.



On a, de par la définition des cylindres inscrits et circonscrits

$$\sum_{1}^{n} v_k = v = \sum_{1}^{n} V_k \ ,$$

et, on veut montrer que l'on a également

$$\sum_{1}^{n} v_k = \frac{8}{15} V = \sum_{1}^{n} V_k \ .$$

Du fait que $\sum_{1}^{n} V_k = \frac{V}{n^5} \sum_{p=0}^{p=n} [n^2 - p^2]^2$ et $\sum_{1}^{n} v_k = \frac{V}{n^5} \sum_{p=1}^{p=n} [n^2 - p^2]^2$, la démonstration de la double égalité $\sum_{1}^{n} v_k = \frac{8}{15}$V $= \sum_{1}^{n} V_k$ exige la démonstration préalable d'un certain nombre de lemmes arithmétiques:

$\sum_{1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$, également démontré dans le traité sur *La mesure de la sphère*, les deux démonstrations reposent sur la propriété classique $k + (n - k + 1) = n + 1$ mise en œuvre un peu différemment;

$\sum_{1}^{n} p^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ (déjà établi dans le traité sur *La mesure de la sphère*, cette propriété avait également été démontrée par Archimède dans le traité *Des Spirales*), démontrée par une récurrence archaïque (on démontre la propriété pour n = 1, …, 4, en mettant à chaque fois en évidence la relation de récurrence);

$\sum_{1}^{n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, démontrée par descente finie à partir des précédentes;

$\sum_{1}^{n} p^4 = (\frac{n}{5} + \frac{1}{5}).n.(n + \frac{1}{2}).[n+1).n - \frac{1}{3}]$ (c'est la première fois dans l'histoire des mathématiques que cette formule est démontrée).

La démonstration de cette dernière formule (par descente finie) repose sur la propriété suivante: $(n+1).\sum_{1}^{n} p^k = \sum_{1}^{n} p^{k+1} + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{p=1}^{p=i} p^k$, ce qui aurait donc pu permettre à Ibn al-Haytham de généraliser sa formule au cas où $n = 5$, mais il n'en a pas besoin pour son objet, qui est simplement de démontrer que:

$$\sum_{p=1}^{p=n}[n^2 - p^2]^2 = \frac{8}{15}n^5 = \sum_{p=0}^{p=n}[n^2 - p^2]^2,$$

d'où il déduit l'inégalité cherchée.

Il démontre ensuite par exhaustion, comme al-Qūhī, que v = $\frac{8}{15}$V (unicité de la limite commune de deux suites adjacentes).

Conclusion.

En conclusion on peut dégager quelques points forts de cette tradition néo-archimédienne étudiée et décrite par Roshdi Rashed et préciser en quoi les travaux que nous venons d'évoquer se distinguent de ceux d'Archimède. On a vu, tout d'abord, que l'utilisation par des mathématiciens comme Thābit ibn Qurra et Ibn Sinān, de transformations géométriques (affinités orthogonales, homothéties, transformations affines quelconques) nouvellement introduites en géométrie, permet de gagner en simplicité et en élégance, la contrepartie de cette élégance étant que ces démonstrations, qui demandent en outre une bonne connaissance des propriétés des coniques, ne sont guère susceptibles d'être généralisées à d'autres courbes que celles pour lesquelles elles ont été conçues. Au cours d'autres démonstrations, d'autre part, sont établis des résultats plus généraux (dont certains étaient en germe chez Archimède): unicité de la borne supérieure (Thābit ibn Qurra), convergence de deux suites adjacentes (al-Qūhī et Ibn al-Haytham); ces démonstrations nécessitent que soient établies des propriétés arithmétiques de plus en plus sophistiquées, inconnues d'Archimède. L'exhaustion, basée sur *Éléments* X. 1 où les généralisations qu'en ont données Thābit ibn Qurra ou Ibn al-Haytham, reste dans tous les cas le procédé qui permet le passage à la limite.